PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

FUNCIONES

- **ÁLGEBRA DE FUNCIONES- COMPOSICION DE FUNCIONES**

Función Signo

$$\boldsymbol{Sea\ f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad Y = f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{Domf = \mathbb{R} \qquad Ranf = \{-1; 0: 1\}}$$

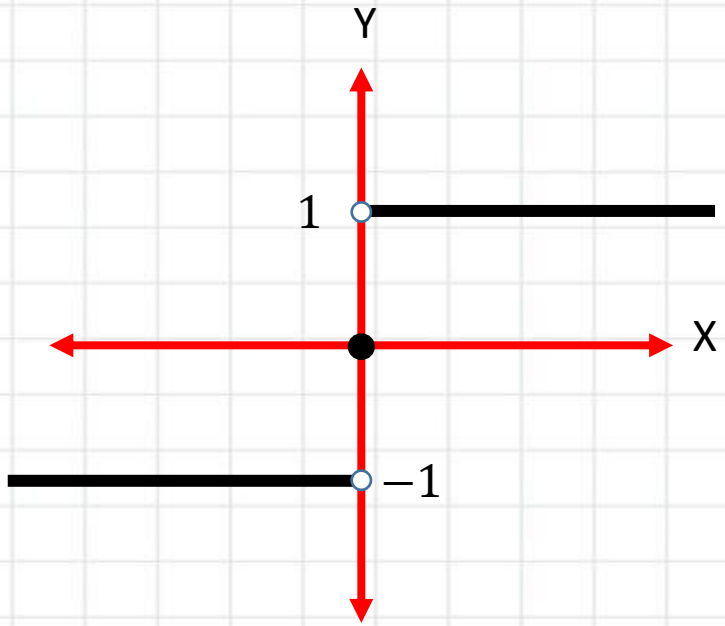
Ejemplos:

$sgn(4) = 1$

$sgn(-3) = -1$

$sgn(4 - \pi) = 1$

$sgn(x^2 + x + 1) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Función Máximo entero

Definimos a $[\![x]\!]$ *como el* ***máximo entero que es menor o igual a x***

$$\boldsymbol{Sea\ f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y = f(x) = [\![x]\!]}$$

Es decir: $[\![x]\!] = n \leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \leq x < n + 1$

Por ejemplo:

$[\![3{,}7]\!] = 3$

$[\![9{,}5]\!] = 9$

$[\![\pi]\!] = 3$

$[\![6]\!] = 6$

$[\![-7{,}3]\!] = -8$

$[\![-4{,}4]\!] = -5$

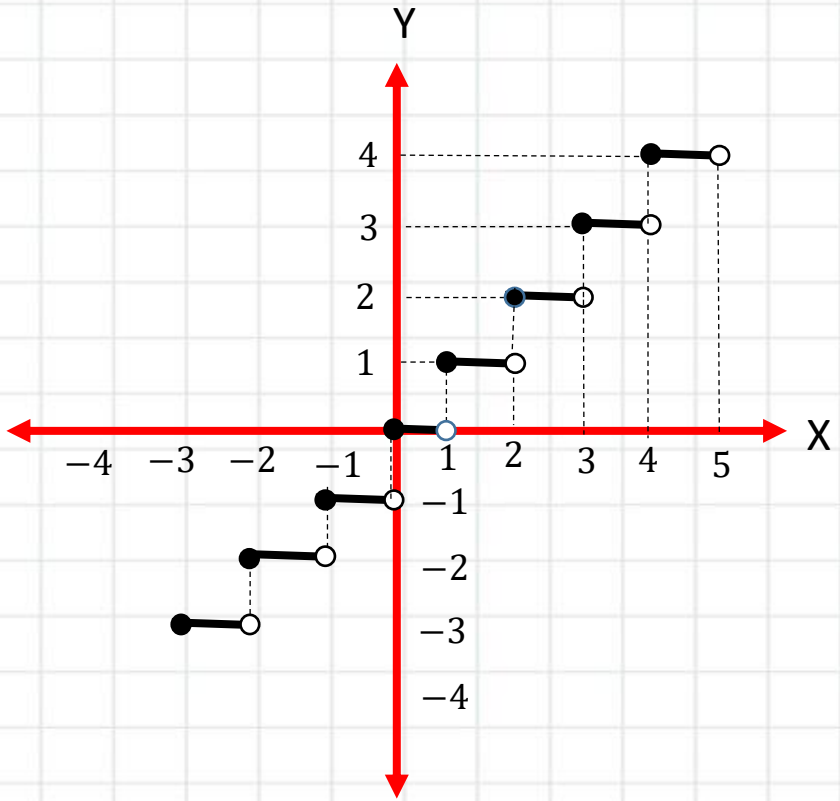
PROPIEDADES

$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, \qquad [\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n$

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq x - [\![x]\!] < 1$

$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad [\![x]\!] \in \mathbb{Z}$

$[\![x]\!] = x \leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$



ÁLGEBRA DE FUNCIONES

1. – *Igualdad de funciones*

Dos funciones f y g son iguales si y solo si

$$Df = Dg \quad \wedge \quad f(x) = g(x), \qquad \forall x \in Df = Dg$$

Ejemplo 1 Las funciones:

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 - 1\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

Son iguales, puesto que:

- $Domf = Domg = \mathbb{R}$
- $f(x) = g(x) = x^2 - 1$

Ejemplo 2 Las funciones:

$$f(x) = xsgn(x)\ ;\ x \in \mathbb{R} \quad \wedge\ g(x) = |x|\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

¿f y g son iguales?

Primero analizamos el dominio

$$Domf = Domg = \mathbb{R} \quad \wedge \quad f(x) = g(x)$$

Redefiniendo, se tiene:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = xsgn(x) = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

Entonces $\quad xsgn(x) = |x| \quad \therefore \quad \boxed{f = g}$

2. – *Suma de funciones*

Dada dos funciones $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{g}$ *con dominios* $\boldsymbol{Df}$ *y* $\boldsymbol{Dg}$ *tal que* $\boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} \neq \emptyset$

Definimos a la función $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ *con dominio* $\boldsymbol{Dh}$ de la siguiente forma:

$$\boxed{h(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_h = D_f \cap D_g}$$

***Ejemplo*1:**

Sean las funciones $f = \{(1;2)(4;-2)(5;-3)(7;2)\}$ $g = \{(0;1)(4;3)(2;2)(5;1)\}$

Para definir correctamente a una función $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ *debemos encontrar valores que pertenezcan tanto al* ***dominio de*** $\boldsymbol{f}$ ***y al dominio de*** $\boldsymbol{g}$.

De este modo, no existe $h(2)$ *ya que* $h(2) = f(2) + g(2)$ *y aunque sí está definido* $g(2)$, ***no está definido*** $\boldsymbol{f}(\mathbf{2})$

De esta forma observamos que solo podemos definir a h para $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ ***y*** $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$.

$$h(4) = f(4) + g(4) = -2 + 3 = 1 \quad \rightarrow \quad (4;1)$$

$$h(5) = f(5) + g(5) = -3 + 1 = -2 \quad \rightarrow \quad (5;-2)$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = \{(\mathbf{4};\mathbf{1})(\mathbf{5};-\mathbf{2})\}$$

Ejemplo2:

Sean las funciones $f = \{(4;2)(3;-3)(0;-3)(7;2)\}$ $g(x) = 2x + 1, \quad x \in]1;5]$

Para definir correctamente a una función $h = f + g$ *debemos encontrar valores que pertenezcan tanto al* ***dominio de f y al dominio de g***

Evidentemente no existe $h(0) = f(0) + g(0)$ *ya que si bien existe* $f(0)$ *,* ***no existe*** $\boldsymbol{g(0)}$

Entonces observamos que solo podemos definir a h para $x = 4$ *y* $x = 3$

$$h(4) = f(4) + g(4) = 2 + 9 = 11 \quad \rightarrow \quad (4;11)$$

$$h(3) = f(3) + g(3) = -3 + 7 = 4 \quad \rightarrow \quad (3;4)$$

$$\boldsymbol{h = f + g = \{(4;11),(3;4)\}}$$

Ejemplo3:

Sean las funciones $f(x) = 4 - x, \quad x \in]-1; 4] \quad g(x) = 3x + 1, \quad x \in]1; 5]$

Para definir correctamente a una función $h = f + g$ *debemos encontrar valores que pertenezcan tanto al* ***dominio de f y al dominio de g***

Evidentemente no existe $h(0) = f(0) + g(0)$ *ya que si bien existe* $f(0)$, ***no existe*** $\boldsymbol{g(0)}$

Entonces observamos que solo podemos definir a h en $]-\mathbf{1}; \mathbf{4}] \cap]\mathbf{1}; \mathbf{5}] =]\mathbf{1}; \mathbf{4}]$

$$\boldsymbol{h(x) = f(x) + g(x)}$$

$$h(x) = 4 - x + 3x + 1$$

$$h(x) = 2x + 5$$

$$\boldsymbol{h(x) = 2x + 5, \qquad Dh =]1; 4]}$$

Ejemplo4: *Sean las funciones*

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in[0;2[\\ 4x+3, & x\in[3;6[\end{cases}}\qquad \boldsymbol{g(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1;4[\\ 5-x, & x\in[5;7[\end{cases}}$$

Para definir correctamente a una función $h=f+g$ debemos encontrar ***sub − funciones cuyos sub − dominios se intersecten***

$$f=\begin{cases}1-2x, & x\in[0;2[\\ 4x+3, & x\in[3;6[\end{cases}$$

$$g=\begin{cases}1+x, & x\in[-1;4[\\ 5-x, & x\in[5;7[\end{cases}$$

¿existe intersección de dominios? → *Sí*

$$(f+g)(x)=1-2x+1+x=\boldsymbol{2-x}\quad,\boldsymbol{x\in[0;2[}$$

¿existe intersección de dominios? → *No*

¿existe intersección de dominios? → *Sí*

$$(f+g)(x)=4x+3+1+x=\boldsymbol{5x+4,x\in[3;4[}$$

¿existe intersección de dominios? → *Sí*

$$f+g(x)=4x+3+5-x=\boldsymbol{3x+8,x\in[5;6[}$$

$$\boldsymbol{finalmente\ h=f+g=\begin{cases}2-x, & x\in[0;2[\\ 5x+4, & x\in[3:4[\\ 3x+8, & x\in[5;6[\end{cases}}$$

Se procederá análogamente para la resta, multiplicación y división de funciones

Dada dos funciones f y g con dominios Df y Dg tal que $Df \cap Dg \neq \emptyset$

3. – *Resta de funciones*

Se define a $\boldsymbol{h = f - g}$, *con dominio* $\boldsymbol{Dh = Df \cap Dg}$ *y que cumple*:

$$\boxed{\boldsymbol{h(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in Dh}}$$

4. – *Multiplicación de funciones*

Se define a $\boldsymbol{h = f.g}$, *con dominio* $\boldsymbol{Dh = Df \cap Dg}$ *y que cumple*:

$$\boxed{\boldsymbol{h(x) = f(x).g(x) \quad \forall x \in Dh}}$$

5. – *División de funciones*

Se define a $\boldsymbol{h = f/g}$, *con dominio* $\boldsymbol{Dh = Df \cap Dg - \{x \in D_g / \ g(x) = 0\}}$ *y que cumple*:

$$\boxed{\boldsymbol{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in Dh}}$$

Función potencia

Dada la función f, se define la función potencia f^n como:

$$\boxed{f^n = \underbrace{f.f.f\ldots f}_{n\ veces}\ ;\ n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 2}$$

Donde:

$$f^n \begin{cases} Dom\,(f^n) = Domf \\ f^n(x) = [\,f(x)\,]^n \end{cases}$$

Observación: $\forall k \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\boxed{kf \begin{cases} Dom(kf) = Domf \\ (kf)(x) = k \cdot f(x) \end{cases}}$$

Ejemplo Sean f y g funciones tales que:

$f(x) = x^2 - x - 1$; $g = \{(-1;1);(0;2)\ ;\ (1;3)\}$

Encuentre $f^2 + 2g$

Resolución

Los dominios son: $Dom(f) = \mathbb{R} \wedge Dom(g) = \{-1\,;0\,;1\}$

$\rightarrow\ Dom(f^2 + 2g) = Dom(f^2) \cap Dom(2g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

$\rightarrow\ Dom(f^2 + 2g) = \{-1\,;0\,;1\}$

$(f^2+2g)(-1) = f^2\,(-1) + 2g(-1) = (1)^2 + 2(1) = 3$

$(f^2+2g)(0) = f^2\,(0) + 2g(0) = (-1)^2 + 2(2) = 5$

$(f^2+2g)(1) = f^2\,(1) + 2g(1) = (-1)^2 + 2(3) = 7$

$\rightarrow\ f^2 + 2g = \{(-1;3);(0;5)\ ;\ (1;7)\}$

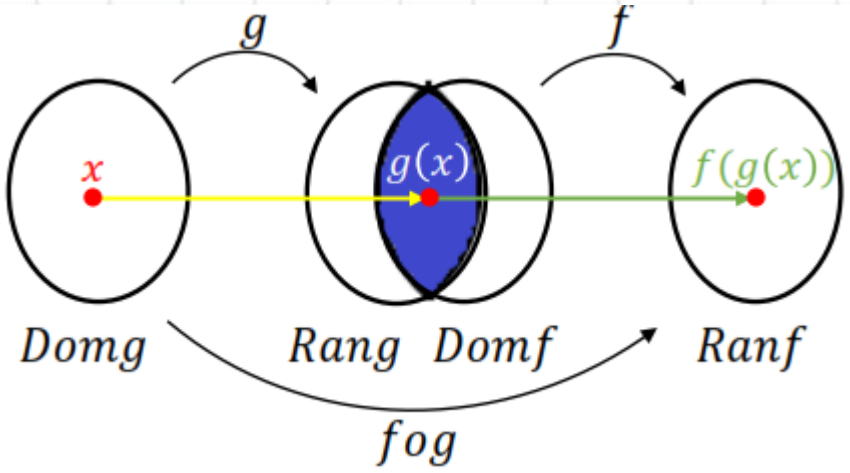
Composición de funciones

Sea $\boldsymbol{f(x)}$ *una función con dominio* $\boldsymbol{D_f}$ *y sea* $\boldsymbol{g(x)}$ *una función con dominio* $\boldsymbol{D_g}$

Definimos a la ***composición de f con g*** *como la función:* $\boldsymbol{fog(x) = f(g(x))}$

y con dominio: $\boldsymbol{Domfog = \{x \in Domg, \quad g(x) \in Domf\}}$

En forma gráfica, tenemos:



OBSERVACIONES:

1. – ***La composición no es conmutativa*** $\boldsymbol{fog \neq gof}$

2. – ***La composición es asociativa:*** $\boldsymbol{f\ o\ (g\ o\ h) = (f\ o\ g)o\ h}$

Ejemplo 1. – 10. Consideremos las funciones :

G = {(-1; 0); (2; 3); (4; 1); (-3; 2); (0; 0); (6; 1)}

F = {(0; 5); (1; -1); (2; 3); (-1; 7); (7; 0)}

Luego el producto de los elementos del rango de FoG es :

A) -5 B) 0 C) -105

D) 15 E) -15

$*$ *Para* ***definir a la composición FoG*** *debemos identificar a aquellos valores del dominio de G tales que quede bien definida la función* $F(G(X))$

Por ejemplo uno de estos valores ***no podría ser*** $\mathbf{2}$, *ya que si bien existe* $\boldsymbol{G(2) = 3}$ *no existiría* $\boldsymbol{F(G(2))}$ *ya que sería* $\boldsymbol{F(3)}$ *y este valor no está definido*

$\rightarrow$ *De acuerdo con esta lógica notamos que* ***FoG*** *solo está definida para* $\boldsymbol{x \in \{-1; 4; -3; 0; 6\}}$

$F(G(-1)) = F(0) = 5$

$F(G(4)) = F(1) = -1$

$F(G(-3)) = F(2) = 3$

$F(G(0)) = F(0) = 5$

$F(G(6)) = F(1) = -1$

$\boldsymbol{Es\ decir\ FoG = \{(-1; 5), (-3; 3), (6; -1), (4; -1), (0; 5)\}}$

$\boldsymbol{RanFoG = \{5; 3; -1\}}$

Rpta: $\boldsymbol{-15}$

Ejemplo 2.–

Sean las funciones $\boldsymbol{f(x) = 2x - 1}$; $\boldsymbol{x \in [-2; 6]}$ *y* $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 3}$; $\boldsymbol{x \in\ ]-2; 3]}$

Definir a la función compuesta $\boldsymbol{fog_{(x)}}$

∗ *Primero definamos al* ***dominio***:

Para que esté bien definida la composición $fog_x = f(g(x))$

x debe pertenecer al dominio de G *es decir* $\underbrace{\boldsymbol{x \in\ ]-2; 3]}}$

pero ***también*** $\boldsymbol{G(x)}$ ***debe pertenecer al domino de F*** *es decir*: $\boldsymbol{-2 \leq G(x) \leq 6}$

$$\boldsymbol{-2 \leq x^2 - 3 \leq 6}$$

$$\boldsymbol{1 \leq x^2 \leq 9}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{-3 \leq x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 3}}$$

Ya que x debe cumplir ambas condiciones, finalmente el Dominio de fog sería:

$$\boldsymbol{Dfog = \ ]-2; -1] \cup \ [1; 3]}$$

y la regla de correspondencia sería

$$\boldsymbol{fog_{(x)} = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = 2(x^2 - 3) - 1 = 2x^2 - 7}$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{fog_{(x)} = 2x^2 - 7 \quad ; Dfog =]-2; -1] \cup \ [1; 3]}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

- **PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN**

1. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

$$f = \left\{ \left(x; \frac{\sqrt{x^2}}{x} \right) \Big/ x \neq 0 \right\}$$

$$g = \left\{ \left(x; \frac{x}{|x|} \right) \Big/ x \neq 0 \right\}$$

I. $f_{(x)} = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \wedge g_{(x)} = \frac{x}{|x|}$ $(F \wedge V) = F$

II. Dom(f)=Dom(g) V

III. $f=g$ V

A) VVF B) VVV C) FVF

D) FVV E) FFV

SOLUCION

$$f(x) = \frac{|x|}{x} ; \overbrace{x \in \mathbb{R} - \{0\}}^{D_f}$$

$$g(x) = \frac{x}{|x|} ; \underbrace{x \in \mathbb{R} - \{0\}}_{D_g}$$

como: $D_f = D_g \wedge f(x) = g(x)$

$\therefore f = g$

$\therefore$ FVV D

2. A partir de las funciones

$f=\{(0;2),(1;3),(2;4),(3;5),(-2;1)\}$

$g=\{(0;1),(2;5),(3;0),(-1;2)\}$

halle las funciones $f-g$; $f\cdot g$ y f/g.

A) $f-g=\{(0;1),(2;-1),(3;5)\}$
$f\cdot g=\{(0;2),(2;20),(3;0)\}$
$f/g=\{(0;2),(2;4/5)\}$

B) $f-g=\{(0;1),(2;1),(3;5)\}$
$f\cdot g=\{(0;2),(2;20),(3;1)\}$
$f/g=\{(0;2),(2;4/5)\}$

C) $f-g=\{(0;1),(2;1),(3;6)\}$
$f\cdot g=\{(0;2),(2;20),(3;0)\}$
$f/g=\{(0;2),(2;4/7)\}$

D) $f-g=\{(0;1),(2;1),(3;6)\}$
$f\cdot g=\{(0;2),(1;20),(1;3)\}$
$f/g=\{(0;2),(2;4/5)\}$

E) $f-g=\{(0;1),(2;1),(3;6)\}$
$f\cdot g=\{(0;2),(-2;20),(3;1)\}$
$f/g=\{(0;2),(2;4/5)\}$

SOLUCION

$\text{Dom} f \cap \text{Dom} g = \{0;2;3\}$

$f-g=\{(0;\underbrace{f(0)}_{2}-\underbrace{g(0)}_{1});(2;\underbrace{f(2)}_{4}-\underbrace{g(2)}_{5});(3;\underbrace{f(3)}_{5}-\underbrace{g(3)}_{0})\}$

$\rightarrow \boxed{f-g=\{(0;1);(2;-1);(3;5)\}}$

Analogamente:

$\boxed{fg=\{(0;2);(2;20);(3;0)\}}$

$\boxed{\frac{f}{g}=\{(0;2);(2;\frac{4}{5})\}}$

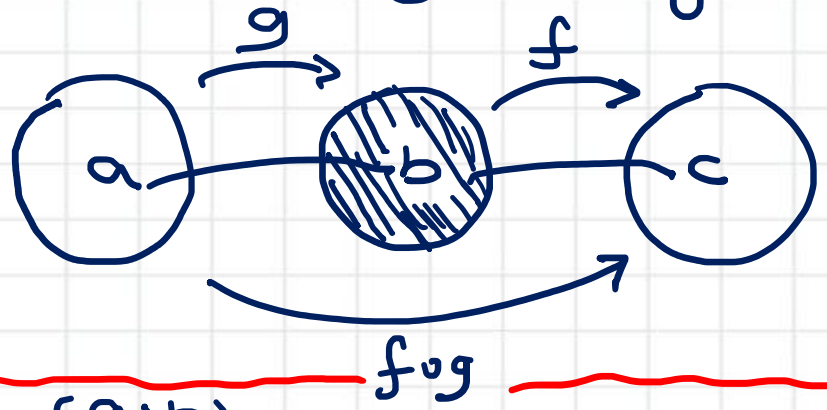
$\therefore$ CLAVE (A)

3. A partir de las funciones
$g=\{(1;5),(4;7),(3;6)\}$
$h=\{(1;7),(4;10),(3;9)\}$
halle una función f, tal que $h=f\circ g$.

A) $f=\{(7;5),(10;7),(9;6)\}$
B) $f=\{(7;5),(6;9),(5;7),(9;4)\}$
C) $f=\{(3;5),(10;7),(5;6)\}$
D) $f=\{(5;3),(7;10),(6;5)\}$
E) $f=\{(5;7),(7;10),(6;9)\}$

SOLUCION

$$\mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathrm{Dom}\,g\cap\{x/\ g(x)\in \mathrm{Dom}\,f\}$$



$$\boxed{\text{Si } (a;b)\in g \wedge (b;c)\in f \rightarrow (a;c)\in f\circ g}$$

$(1;5)\in g \wedge (5;7)\in f \qquad (1;7)\in f\circ g$

$(4;7)\in g \wedge (7;10)\in f \qquad (4;10)\in f\circ g$

$(3;6)\in g \wedge (6;9)\in f \qquad (3;9)\in f\circ g$

$\therefore\ f=\{(5;7);(7;10);(6;9)\}$

CLAVE E

4. Sean las funciones

$f_{(x)} = \dfrac{1}{x-2}; \quad x \geq 3$

$g_{(x)} = x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \quad x \geq \dfrac{1}{2}$

Halle el dominio de $g \circ f$.

A) $\text{Dom}(g \circ f) = \langle 3; 4 \rangle$
B) $\text{Dom}(g \circ f) = [3; 4\rangle$
C) $\text{Dom}(g \circ f) = [3; 4]$
D) $\text{Dom}(g \circ f) = \langle 3; 4]$
E) $\text{Dom}(g \circ f) = \langle 4; 5 \rangle$

SOLUCION

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}; \quad D_f = [3; +\infty\rangle$

$g(x) = x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \quad D_g = [\tfrac{1}{2}; +\infty\rangle$

Se debe saber:

$\text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}\, g \cap \{x / g(x) \in \text{Dom}\, f\}$

Luego:

$\text{Dom}(g \circ f) = \underbrace{\text{Dom}\, f}_{[3; +\infty\rangle} \cap \{x / \underbrace{f(x)}_{\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{2}} \in \text{Dom}\, g\}$

α

$b > 0 \rightarrow \dfrac{1}{b} > 0$

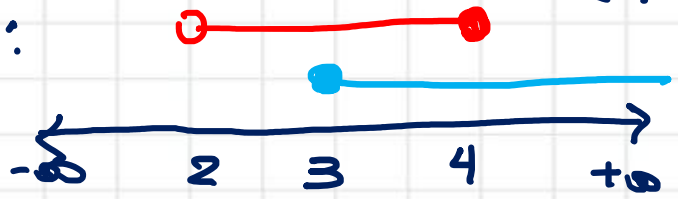
α

Se resuelve: $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{1}{2}$

Invertir: $0 < x - 2 \leq 2$

$2 < x \leq 4$

Luego:



$\therefore \text{Dom}(g \circ f) = [3; 4]$

CLAVE C

5. Si se sabe que

$f_{(x)} = \sqrt{x^2 - x}$ y $g_{(x)} = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$

determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ F

II. $\text{Dom}(f^2) = \text{Dom}(g^2)$ F

III. $f = g$ F

A) VVV ~~B) FFF~~ C) FVF

D) FFV E) FVV

SOLUCION

Para f:

$\text{Dom}(f) = \{x / x^2 - x \geq 0\}$

$x(x-1) \geq 0$

$\rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle$

$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Para g:

$\text{Dom}\, g = \{x / x \geq 0 \wedge x - 1 \geq 0\}$

$x \geq 0 \wedge x \geq 1$

$\rightarrow \text{Dom}\, g = [1, +\infty\rangle$

$g(x) = \sqrt{x(x-1)} \rightarrow g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

En la teoría: $\text{Dom}(f^2) = \text{Dom}\, f \wedge \text{Dom}(g^2) = \text{Dom}(g)$

$\rightarrow \text{Dom}(f^2) = \text{Dom}\, g^2 \Rightarrow \text{Dom}\, f = \text{Dom}\, g$

$\therefore$ FFF B

6. A partir de las funciones

$f+g=\{(-1;0),(4;2),(7;8),(3;21)\}$

$f_{(x)}=2x+1;\quad x\geq -1$

calcule la suma de los elementos del rango de g.

A) -7 B) 0 C) 1 D) 7 E) 14

SOLUCION

por dato:

$Dom(f+g)=Df\cap Dg$

$\{-1;4;7;3\}=[-1;+\infty\rangle\cap Dg \rightarrow Dg=\{-1;4;3;7\}$

Luego: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$x=-1$: $0=\underbrace{f(-1)}_{-1}+g(-1)\rightarrow g(-1)=1$

$x=4$: $2=\underbrace{f(4)}_{9}+g(4)\rightarrow g(4)=-7$

$x=7$: $8=\underbrace{f(7)}_{15}+g(7)\rightarrow g(7)=-7$

$x=3$ $21=\underbrace{f(3)}_{7}+g(3)\rightarrow g(3)=14$

$g=\{(-1;g(-1));(4;g(4));(3;g(3))$
$(7;g(7))\}$

finalmente

$g=\{(-1;1);(4;-7);(3;14);(7;-7)\}$

$\Sigma elem(Ran(g))=1-7+14-7=1$

CLAVE C

7. Dadas las funciones

$f=\{(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/y=2x-1 \wedge x\in\{2;3;5\}\}$

$g=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{+}\Big/(y-1)=2x \wedge x\in\left[2;\frac{9}{2}\right\rangle\right\}$

determine $f+g \wedge f-g$.

A) $f+g=\{(4;6),(6;10)\}$
$f-g=\{(4;5),(6;0)\}$

B) $f+g=\{(2;3),(3;8)\}$
$f-g=\{(2;1),(3;0)\}$

C) $f+g=\{(2;8),(3;12)\}$
$f-g=\{(2;-2),(3;-2)\}$

D) $f+g=\{(2;8),(3;12)\}$
$f-g=\{(2;-1),(3;-1)\}$

E) $f+g=\{(2;7),(3;12)\}$
$f-g=\{(2;-2),(3;-2)\}$

SOLUCION

$f(x)=2x-1;\ \text{Dom}\, f=\{2;3;5\} \rightarrow f=\{(2;3);(3;5);(5;9)\}$

$g(x)=2x+1;\ \text{Dom}\, g=[2;\frac{9}{2}\rangle$

Luego: $D(f+g)=D(f-g)=Df\cap Dg=\{2;3\}$

$f+g=\{(2;\underbrace{f(2)}_{3}+\underbrace{g(2)}_{5});\ (3;\underbrace{f(3)}_{5}+\underbrace{g(3)}_{7})\}$

$\therefore\ f+g=\{(2;8);(3;12)\}$

$f-g=\{(2;-2);(3;-2)\}$

CLAVE C

8. Sean las funciones g y h, tal que

$g_{(x)}=x^2-3; \quad x \in \langle -2; 4]$

$h_{(x)}=2x+1; \quad x \in \langle -3; 3]$

Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $\text{Dom}(g+h)=\text{Dom}(g^2-h)$

II. $(h+g)_{(x)}=(x+1)^2-3 \quad \forall\, x \in \text{Dom}(h+g)$

III. $\text{Ran}(h+g)=[-3; 13]$

A) FVV B) FVF C) VVV

D) VFV E) VVF

SOLUCION

$D_g \cap D_h = \langle -2; 4] \cap \langle -3; 3] \rightarrow D_g \cap D_h = \langle -2; 3]$

$D_{g^2} = D_g \rightarrow \text{Dom}(g^2-h) = \text{Dom}(g-h) = \text{Dom}(g+h) = D_g \cap D_h$

I) $\text{Dom}(g+h) = \text{Dom}(g^2-h)$ (V)

II) $(h+g)(x) = h(x) + g(x) = 2x+1 + x^2-3 = \underbrace{x^2+2x+1}-3$

$\rightarrow (h+g)(x) = (x+1)^2-3; \ \underbrace{x \in \langle -2; 3]}_{\text{Dom}(h+g)}$ (V)

III) de (II), se sabe: $-2 < x \leq 3$

$+1: \ -1 < x+1 \leq 4$

$\wedge 2: \ 0 \leq (x+1)^2 \leq 16$

$-3: \ -3 \leq \underbrace{(x+1)^2-3}_{(h+g)(x)} \leq 13$

$\therefore \text{Ran}(h+g) = [-3; 13]$ (V)

9. Sean las funciones

$f=\{(1;2),(3;4),(2;6),(5;7)\}$

$g=\{(2;3),(4;1),(3;6),(5;9)\}$

$h_{(x)}=x+2;\quad x\in\langle -2;2\rangle$

Calcule la suma de los elementos del rango de $(f+g)\circ h$.

A) 16 B) 18 ~~C)~~ 19 D) 20 E) 21

SOLUCION si $(a;b)\in g \wedge (b;c)\in f \rightarrow (a;c)\in f\circ g$.

Al ojo:

$f+g=\{(3;10);(2;9);(5;16)\}$

Luego: $h(x)=x+2;\ -2<x<2$

$Dom((f+g)\circ h)=Dh\cap\{x/\ h(x)\in Dom(f+g)\}$

$\langle -2;2\rangle\cap\{x/\ x+2\in\{3;2;5\}\}$

$x+2=3\rightarrow x=1$

$x+2=2\rightarrow x=0$

$x+2=5\rightarrow x=3$

$\langle -2;2\rangle\cap\{1;0;3\}$

$\rightarrow Dom((f+g)\circ h)=\{1;0\}$

$\rightarrow (f+g)\circ h=\{(1;\underbrace{(f+g)(1)\circ h(1)}_{10});(0;\underbrace{(f+g)(0)\circ h(0)}_{9})\}=\{(1;10);(0;9)\}$ CLAVE C

$\therefore \sum elem(Ran((f+g)\circ h))=10+9=19$

10. Si $A_{(x)}=x^2-1;\quad x>0$ y
$B_{(x)}=x^2+1;\quad x<2$
son funciones, indique el rango de $\left(\frac{B}{A}\right)$.

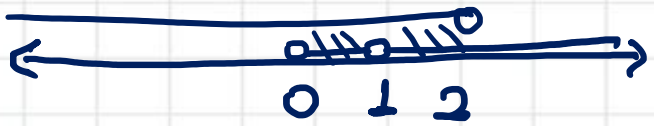
A) $\langle -\infty; 1\rangle$ B) $\langle -1; 3\rangle$ C) $\langle -1; +\infty\rangle$

~~D)~~ $\langle -\infty; -1\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}; +\infty\right\rangle$ E) $\langle -1; 1\rangle$

SOLUCION

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{B}{A}\right) = \mathrm{Dom}B \cap \mathrm{Dom}A$$

$$\langle -\infty; 2\rangle \cap \langle 0; +\infty\rangle - \{1\}$$



$$\mathrm{Dom}\left(\frac{B}{A}\right) = \langle 0; 1\rangle \cup \langle 1; 2\rangle$$

Luego $\left(\frac{B}{A}\right)(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \rightarrow \left(\frac{B}{A}\right)(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1};\ 0<x<1 \vee 1<x<2$

$y = 1 + \frac{2}{x^2-1}$ .....(α)

$0<x<1 \vee 1<x<2$

$0<x^2<1 \vee 1<x^2<4$

$-1<x^2-1<0 \vee 0<x^2-1<3$

$-1 > \frac{1}{x^2-1} \vee \frac{1}{x^2-1} > \frac{1}{3}$

$-2 > \frac{2}{x^2-1} \vee \frac{2}{x^2-1} > \frac{2}{3}$

$-1 > \underbrace{1+\frac{2}{x^2-1}}_{y} \vee \underbrace{1+\frac{2}{x^2-1}}_{y} > \frac{5}{3}$

$\therefore \mathrm{Ran}\left(\frac{B}{A}\right) = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle \frac{5}{3}; +\infty\rangle$

CLAVE D

11. Considere las funciones

$f_{(x)} = x-2;\ x \in \langle 3;6]$

$g_{(x)} = 1+\sqrt{x};\quad x \geq 9$

Halle $f \circ g$ (si existe).

A) No existe $f \circ g$. ✗

B) $(f \circ g)_{(x)} = x-1;\ 9 \leq x < 25$

C) $(f \circ g)_{(x)} = \sqrt{x}+1;\ 9 \leq x \leq 25$

D) $(f \circ g)_{(x)} = \sqrt{x}-1;\ 9 \leq x \leq 25$

E) $(f \circ g)_{(x)} = \sqrt{x}-1;\ 9 < x < 25$

SOLUCION

$\exists\ f \circ g \longleftrightarrow \underbrace{Ran(g)}\cap Dom(f) \neq \emptyset$

$[4;+\infty\rangle \cap \langle 3;6] = [4;6] \neq \emptyset$

$f(x) = x-2,\quad x \in \langle 3;6]$

$g(x) = 1+\sqrt{x};\ x \in [9;+\infty\rangle$

$Dom(f \circ g) = Dom\,g \cap \{x / g(x) \in Dom\,f\}$

$[9;+\infty\rangle \cap \{x / 1+\sqrt{x} \in \langle 3;6]\} \Rightarrow \boxed{Dom(f \circ g) = [9;25]}$

$3 < 1+\sqrt{x} \leq 6$

$2 < \sqrt{x} \leq 5$

$[9;+\infty\rangle \cap \quad 4 < x \leq 25$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(1+\sqrt{x}) = 1+\sqrt{x}-2$

$\therefore\ (f \circ g)(x) = \sqrt{x}-1,\ x \in [9;25]$ QUE D

12. Sea $f: \langle -2; 3\rangle \to \mathbb{R}$, tal que $f_{(x)} = 2x+3$. Halle el dominio de $f \circ f \circ f$.

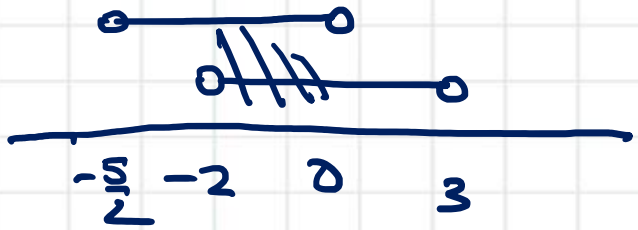
A) $\left\langle -2; -\frac{3}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle -1; -\frac{3}{2}\right\rangle$ C) $\langle -2; 0\rangle$

D) $\left\langle -\frac{5}{6}; 0\right\rangle$ E) $\left\langle -2; -\frac{1}{2}\right\rangle$

SOLUCION

$f(x) = 2x+3; \quad D_f = \langle -2; 3\rangle$

$\mathrm{Dom}(f \circ f) = D_f \cap \{x / f(x) \in \mathrm{Dom} f\}$



$\langle -2; 3\rangle \cap \{x / -2 < 2x+3 < 3$

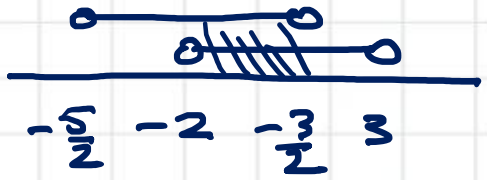
$-5 < 2x < 0$

$-\frac{5}{2} < x < 0$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f \circ f) = \langle -2; 3\rangle \cap \langle -\frac{5}{2}; 0\rangle = \langle -2; 0\rangle$

Luego:

$\mathrm{Dom}((f \circ f) \circ f) = D_f \cap \{x / f(x) \in \mathrm{Dom}(f \circ f)\}$



$\langle -2; 3\rangle \cap \{x / -2 < 2x+3 < 0\}$

$-5 < 2x < -3$

$\langle -2; 3\rangle \cap \quad -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{Dom}(f \circ f \circ f) = \langle -2; -\frac{3}{2}\rangle$

13. Sean f, g y h funciones reales de variable real. Dadas las siguientes proposiciones:

I. $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ F

II. Si $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$. V

III. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F). V

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) FFF

UNI 2013-I

SOLUCION Usar contraejemplos:

I) $f(x) = x$; $g(x) = 2x$; $h(x) = \sqrt{x}$

$f(x) + g(x) = 3x$

$h(f(x)) = h(x) = \sqrt{x}$

$h(g(x)) = h(2x) = \sqrt{2x}$

Luego.

$h \circ (f+g) = h((f+g)(x)) = h(3x) = \sqrt{3x}$

$h \circ f = h(f(x)) = h(x) = \sqrt{x}$

$h \circ g = h(g(x)) = h(2x) = \sqrt{2x}$

$\rightarrow \sqrt{3x} \neq \sqrt{x} + \sqrt{2x}$ (F)

II) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom} g = \mathbb{R}$

$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom} g \cap \{x / g(x) \in \mathrm{Dom} f\}$

$\mathbb{R} \cap \underbrace{\{x / g(x) \in \mathbb{R}\}}_{\mathbb{R}}$

$\rightarrow \mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$

III) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (teoría)

$(f \circ g)(h(x)) = f \circ (g(h(x)))$

$f(g(h(x))) = f(g(h(x)))$

ASOCIATIVA DE LA COMPOSICIÓN

14. Sean las funciones vectoriales de variable vectorial f y g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; tal que
$f_{(x;\,y)}=(x+3;\,y-1) \wedge g_{(x;\,y)}=(-y;\,x)$
Si existe $(a;\,b)$, tal que $(g \circ f)_{(a;\,b)}=(a;\,b)$, determine $(a;\,b)$.

A) $(2;\,-1)$ B) $(-1;\,-2)$ C) $(-1;\,2)$
D) $(1;\,-1)$ E) $(-1;\,3)$

SOLUCION

15. Dadas las siguientes funciones:

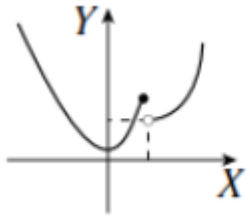
$$f_{(x)} = \begin{cases} x-2; \text{ si } x \in \langle 2; +\infty \rangle \\ 4; \text{ si } x \in \langle -\infty; 2] \end{cases}$$

$g_{(x)} = x^2; x \in \mathbb{R}$

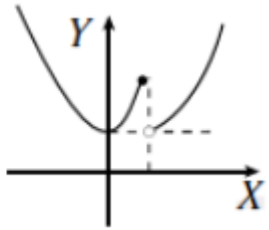
halle la gráfica de $f+g$.

SOLUCION

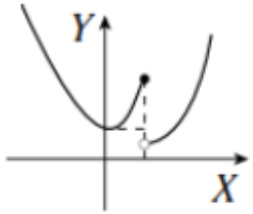
A)



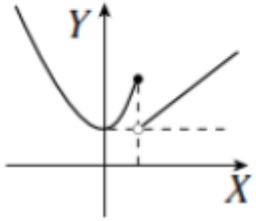
B)



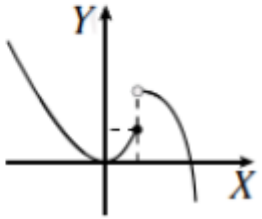
C)



D)



E)



16. Si tenemos que

$f_{(x)} = \sqrt{2-x}$; $\forall x \in \langle -\infty; 2]$

$g_{(x)} = -\sqrt{x}$; $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$

determine el rango de $f-g$.

A) $\text{Ran}(f-g) = [\sqrt{2}; 4]$

B) $\text{Ran}(f-g) = \langle \sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

C) $\text{Ran}(f-g) = [\sqrt{2}; 2]$

D) $\text{Ran}(f-g) = \langle -\infty; 2]$

E) $\text{Ran}(f-g) = [2; 2\sqrt{2}]$

SOLUCION

$\text{Dom}(f-g) = D_f \cap D_g = \langle -\infty; 2] \cap [0; +\infty\rangle = [0; 2]$

$\rightarrow \text{Dom}(f-g) = [0; 2]$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{2-x} - (-\sqrt{x}) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x}$

$\rightarrow (f-g)(x) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2x - x^2}} \rightarrow (f-g)(x) = \sqrt{2 + 2\sqrt{-(x-1)^2 + 1}}$

Cálculo del rango:

$0 \leq x \leq 2$

$-1 \leq x-1 \leq 1$

$0 \leq (x-1)^2 \leq 1$

$0 \geq -(x-1)^2 \geq -1$

$1 \geq 1-(x-1)^2 \geq 0$

$1 \geq \sqrt{1-(x-1)^2} \geq 0$

$2 \geq 2\sqrt{1-(x-1)^2} \geq 0$

$4 \geq 2 + 2\sqrt{1-(x-1)^2} \geq 2$

$2 \geq \underbrace{\sqrt{2 + 2\sqrt{1-(x-1)^2}}}_{f-g} \geq \sqrt{2}$

$\therefore R(f-g) = [\sqrt{2}; 2]$

C

16. Si tenemos que

$f_{(x)} = \sqrt{2-x}$; $\forall\, x \in \langle -\infty; 2]$

$g_{(x)} = -\sqrt{x}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$

determine el rango de $f-g$.

A) $\text{Ran}(f-g) = [\sqrt{2}; 4]$

B) $\text{Ran}(f-g) = \langle \sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

C) $\text{Ran}(f-g) = [\sqrt{2}; 2]$

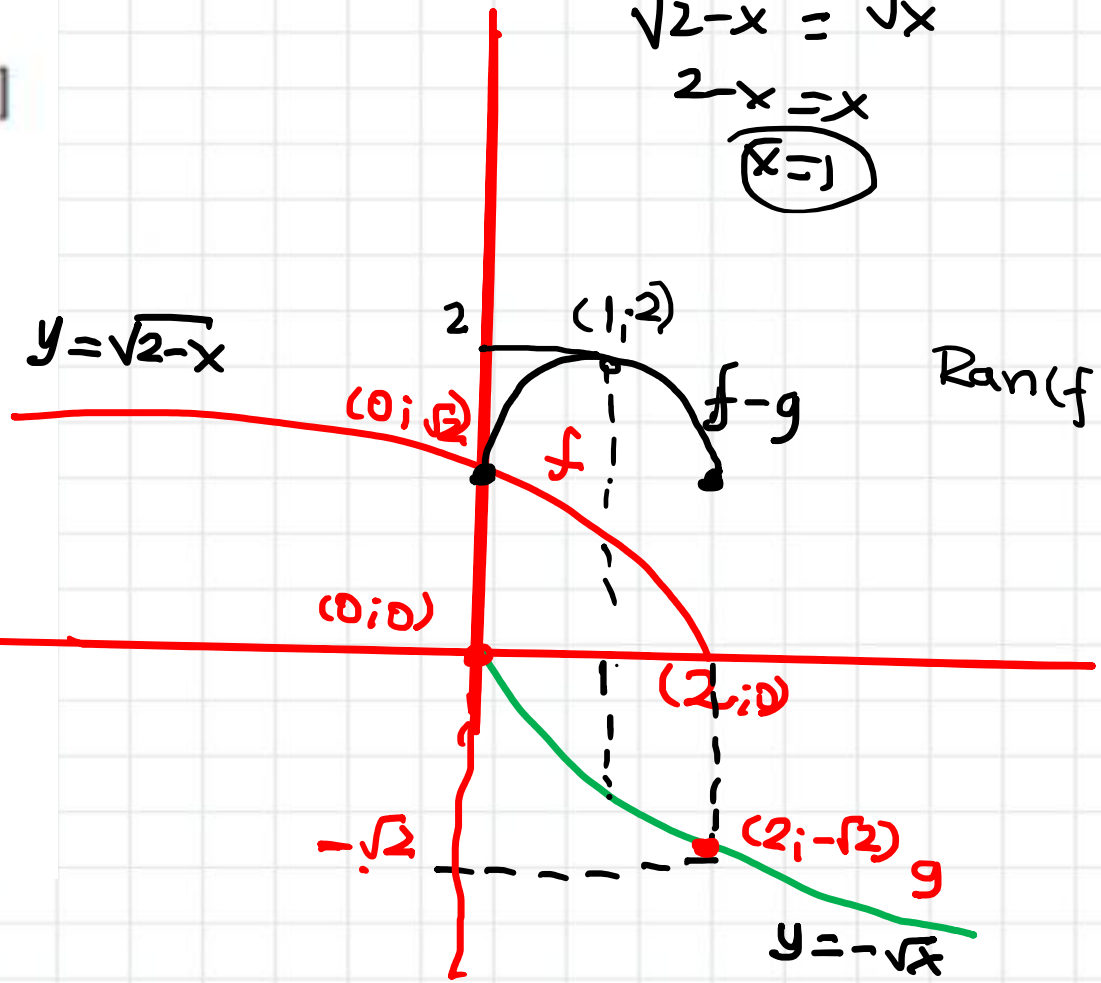
D) $\text{Ran}(f-g) = \langle -\infty; 2]$

E) $\text{Ran}(f-g) = [2; 2\sqrt{2}]$

$\sqrt{2-x} = \sqrt{x}$

$2-x = x$

$x = 1$



$\text{Ran}(f-g) = [\sqrt{2}; 2]$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS